



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

Επιχειρησιακή έρευνα και Εφαρμοσμένη Οικονομετρία

ΤΟΜΟΣ Β

Βασίλης Αγγελής

*Καθηγητής
Πανεπιστημίου Αιγαίου*

**Γραμμικός
Προγραμματισμός**

Το έργο συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση και το Ελληνικό Δημόσιο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΗ ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΟΙΚΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

Γραμμικός Προγραμματισμός

Σημείωση:

Το ΕΑΠ είναι υπεύθυνο για την επιμέλεια έκδοσης και την ανάπτυξη των κειμένων σύμφωνα με τη Μεθοδολογία της εξ Αποστάσεως Εκπαίδευσης. Για την επιστημονική αριότητα και πληρότητα των συγγραμμάτων, την αποκλειστική ευθύνη φέρουν οι συγγραφείς, κριτικοί αναγνώστες και ακαδημαϊκοί υπεύθυνοι που ανέλαβαν το έργο αυτό.

Copyright © 2008
Για την Ελλάδα και όλο τον κόσμο
ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
Πάροδος Αριστοτέλους 18, 26335 Περιβόλα Πατρών
Τηλ.: 2610 367300-Φαξ: 2610 367350

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ ΤΟΥ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ
του τόμου
Γραμμικός Προγραμματισμός

Ακαδημαϊκός Υπεύθυνος του Προγράμματος Σπουδών
Ιωάννης Κεχαγιάς
Αναπληρωτής Καθηγητής Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου

Συντονιστής της Θεματικής Ενότητας, Επιστημονικός Επιμελητής
Βασίλης Αγγελής
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αιγαίου

Συγγραφή
Βασίλης Αγγελής
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αιγαίου

Κριτική Ανάγνωση
Δρ. Γιώργος Σταθάκης

Γλωσσική Επιμέλεια
Πέτρος Χριστοφιλίδης

Τεχνική Επιμέλεια – Καλλιτεχνική Επιμέλεια – Σελιδοποίηση
opusMAGNUM

ISBN: 978-960-538-831-7

Συντονισμός ανάπτυξης εκπαιδευτικού υλικού και γενική επιμέλεια των εκδόσεων
ΟΜΑΔΑ ΕΚΤΕΛΕΣΗΣ ΕΡΓΟΥ ΕΑΠ

Σύμφωνα με το Ν. 2121/1993, απαγορεύεται η συνολική ή αποσπασματική αναδημοσίευση του βιβλίου αυτού ή η αναπαραγωγή του με οποιοδήποτε μέσο, χωρίς την άδεια του εκδότη.



ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΑΝΟΙΚΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΚΟΙΝΩΝΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

Διοίκηση Επιχειρήσεων και Οργανισμών

ΘΕΜΑΤΙΚΗ ΕΝΟΤΗΤΑ

**Επιχειρησιακή Έρευνα και
Εφαρμοσμένη Οικονομετρία**

ΤΟΜΟΣ Β

ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ

ΠΑΤΡΑ 2008

Βιογραφικό Σημείωμα

Ο Βασίλης Α. Αγγελής είναι Καθηγητής Ποσοτικών Μεθόδων στο Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων του Πανεπιστημίου Αιγαίου, όπου διδάσκει από το 1987. Είναι πτυχιούχος του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Αθηνών με MSc στη Στατιστική και στην Επιχειρησιακή Έρευνα από το Πανεπιστήμιο Aston του Birmingham και PhD στη Θεωρία Ελέγχου από το Πανεπιστήμιο του Warwick. Από το 1979 μέχρι το 1985 εργάστηκε στα Ναυπηγεία Χαλκίδας Α.Ε. και από το 1985 μέχρι σήμερα εργάζεται στην Αγροτική Τράπεζα. Έχει επίσης διδάξει για αρκετά έτη ως Επισκέπτης Καθηγητής στο Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών και από το 2001 συνεργάζεται με το Ελληνικό Ανοικτό Πανεπιστήμιο. Έχει συγγράψει πανεπιστημιακές σημειώσεις για πολλά μαθήματα και έχει δημοσιεύσει μεγάλο αριθμό επιστημονικών εργασιών σε επιστημονικά περιοδικά, πρακτικά συνεδρίων και συλλογικούς τόμους.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος	13
-----------------	-----------

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή στο γραμμικό προγραμματισμό	17
---	-----------

Σκοπός.....	17
Προσδοκώμενα Αποτελέσματα.....	17
Έννοιες-Κλειδιά.....	17
Εισαγωγικές Παρατηρήσεις.....	18

Ενότητα 1.1

Ιστορικά στοιχεία.....	19
-------------------------------	-----------

Ενότητα 1.2

Εφαρμογές γραμμικού προγραμματισμού.....	20
---	-----------

Ενότητα 1.3

Μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού.....	22
1.3.1 Βασικά στοιχεία.....	22
1.3.2 Προϋποθέσεις.....	23

Ενότητα 1.4

Διατύπωση προβλημάτων ως μοντέλων γραμμικού προγραμματισμού.....	25
1.4.1 Πρόβλημα μεγιστοποίησης.....	25
1.4.2 Πρόβλημα ελαχιστοποίησης.....	28
Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης.....	32
Σύνοψη.....	36
Παράρτημα.....	37

Γραφική επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού	41
Σκοπός	41
Προσδοκώμενα Αποτελέσματα.....	41
Έννοιες-Κλειδιά.....	42
Εισαγωγικές Παρατηρήσεις	42
	Ενότητα 2.1
Μεθοδολογία επίλυσης.....	44
2.1.1 Θεωρητικό πλαίσιο	44
2.1.2 Εφαρμογή σε πρόβλημα μεγιστοποίησης.....	46
2.1.3 Εφαρμογή σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης.....	53
	Ενότητα 2.2
Διερεύνηση της λύσης.....	58
2.2.1 Θεωρητικό πλαίσιο	58
2.2.2 Εφαρμογή σε πρόβλημα μεγιστοποίησης.....	60
2.2.3 Εφαρμογή σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης.....	61
	Ενότητα 2.3
Ειδικές περιπτώσεις	63
2.3.1 Εισαγωγή.....	63
2.3.2 Πρόβλημα με άπειρες λύσεις.....	63
2.3.3 Πρόβλημα χωρίς εφικτή λύση.....	66
2.3.4 Μη φραγμένο πρόβλημα	69
	Ενότητα 2.4
Ανάλυση ευαισθησίας της λύσης.....	71
2.4.1 Εισαγωγή.....	71
2.4.2 Εφαρμογή σε πρόβλημα μεγιστοποίησης.....	73
2.4.2.1 Μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές.....	73
2.4.2.2 Μεταβολές στα δεξιά μέλη των περιορισμών.....	76
2.4.3 Εφαρμογή σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης.....	83
2.4.3.1 Μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές.....	83
2.4.3.2 Μεταβολές στα δεξιά μέλη των περιορισμών.....	84

2.4.4 Κόστος ευκαιρίας	86
Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης	87
Σύνοψη	90
Παράρτημα	91

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Επίλυση προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού με τη μέθοδο Simplex 97

Σκοπός.....	97
Προσδοκώμενα Αποτελέσματα	97
Έννοιες-Κλειδιά	97
Εισαγωγικές Παρατηρήσεις	98

Ενότητα 3.1

Βασικές έννοιες	100
------------------------------	------------

Ενότητα 3.2

Γενική, κανονική και τυπική μορφή του μοντέλου.....	101
--	------------

Ενότητα 3.3

Παρουσίαση της μεθοδολογίας.....	106
3.3.1 Θεωρητικό πλαίσιο	106
3.3.1.1 Πρόβλημα μεγιστοποίησης.....	107
3.3.1.2 Πρόβλημα ελαχιστοποίησης.....	117
3.3.2 Εφαρμογή σε πρόβλημα μεγιστοποίησης	122
3.3.3 Εφαρμογή σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης	134

Ενότητα 3.4

Ειδικές περιπτώσεις.....	144
3.4.1 Εισαγωγή.....	144
3.4.2 Πρόβλημα με άπειρες λύσεις	144
3.4.3 Πρόβλημα χωρίς εφικτή λύση	146
3.4.4 Μη φραγμένο πρόβλημα	148

Ενότητα 3.5	
Ανάλυση ευαισθησίας της λύσης	150
3.5.1 Εισαγωγή	150
3.5.2 Μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές	151
3.5.3 Μεταβολές στους διαθέσιμους πόρους.....	152
3.5.4 Εφαρμογή σε πρόβλημα μεγιστοποίησης	154
3.5.4.1 Μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές	154
3.5.4.2 Μεταβολές στους διαθέσιμους πόρους.....	157
3.5.5 Εφαρμογή σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης	159
3.5.5.1 Μεταβολές στους αντικειμενικούς συντελεστές	159
3.5.5.2 Μεταβολές στους διαθέσιμους πόρους.....	161
Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης	164
Σύνοψη	167
Παράρτημα	168

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Το δυϊκό πρόβλημα	175
Σκοπός	175
Προσδοκώμενα Αποτελέσματα.....	175
Έννοιες-Κλειδιά.....	175
Εισαγωγικές Παρατηρήσεις	176
Ενότητα 4.1	
Εισαγωγή	177
Ενότητα 4.2	
Δημιουργία του δυϊκού από το πρωτεύον όταν αυτό είναι στην κανονική μορφή	178
Ενότητα 4.3	
Κατασκευή του δυϊκού από το πρωτεύον όταν αυτό είναι στη γενική μορφή	181

	Ενότητα 4.4
Οικονομική ερμηνεία του δυϊκού.....	186

	Ενότητα 4.5
Σχέσεις πρωτεύοντος-δυϊκού.....	189
4.5.1 Εισαγωγή.....	189
4.5.2 Εύρεση της λύσης του δυϊκού από τη λύση του πρωτεύοντος.....	189

	Ενότητα 4.6
Η σπουδαιότητα του δυϊκού προβλήματος	196
Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης	198
Σύνοψη.....	202
Παράρτημα	203

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με Η/Υ 209

Σκοπός.....	209
Προσδοκώμενα Αποτελέσματα	209
Έννοιες-Κλειδιά	209
Εισαγωγικές Παρατηρήσεις	210

	Ενότητα 5.1
Εισαγωγή	211

	Ενότητα 5.2
Επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με το MS Excel Solver.....	215
5.2.1 Έναρξη της εφαρμογής.....	215
5.2.2 Προσδιορισμός κελιών και εισαγωγή σχολίων.....	216
5.2.3 Εισαγωγή δεδομένων και σχολίων.....	217
5.2.4 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.....	218
5.2.5 Επίλυση	219

	Ενότητα 5.3
Επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με το LINDO	226
5.3.1 Έναρξη της εφαρμογής.....	226
5.3.2 Γενική μορφή προβλήματος	227
5.3.3 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος και εισαγωγή σχολίων	227
5.3.4 Επίλυση	228
5.3.5 Εμφάνιση του τελικού πίνακα Simplex	231
	Ενότητα 5.4
Επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού με το WinQSB	234
5.4.1 Έναρξη της εφαρμογής.....	234
5.4.2 Μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.....	235
5.4.3 Επίλυση	237
Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης	241
Σύνοψη	246
Παράρτημα	247
Ευρετήριο όρων	251
Βιβλιογραφία	261
Οδηγός για Περαιτέρω Μελέτη	263

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Οι επιχειρήσεις και οι οργανισμοί αντιμετωπίζουν συχνά το πρόβλημα λήψης επιχειρηματικών αποφάσεων για την επίτευξη ενός στόχου, με περιορισμούς ενδογενείς ή εξωγενείς. Στους ενδογενείς περιορισμούς εντάσσονται αυτοί που αφορούν, αφενός, τους διαθέσιμους πόρους των επιχειρήσεων, όπως το εργατικό δυναμικό, τις πρώτες ύλες και τα κεφάλαια και, αφετέρου, την πολιτική και τον κανονισμό λειτουργίας τους. Αντίστοιχα, στους εξωγενείς περιορισμούς περιλαμβάνονται αυτοί που αφορούν τη ζήτηση των προϊόντων ή των υπηρεσιών των επιχειρήσεων, τον ανταγωνισμό και το θεσμικό πλαίσιο λειτουργίας τους.

Ο Γραμμικός Προγραμματισμός, ο οποίος αποτελεί και το αντικείμενο μελέτης του παρόντος τόμου, είναι μία από τις πιο διαδεδομένες και ευρέως χρησιμοποιούμενες τεχνικές της Επιχειρησιακής Έρευνας, οι οποίες έχουν αναπτυχθεί για να βοηθούν τα στελέχη των επιχειρήσεων και των οργανισμών στη λήψη επιχειρηματικών αποφάσεων. Ο παρών τόμος, σε συνδυασμό και με τον υπάρχοντα τόμο «Επιχειρησιακή Έρευνα», καλύπτουν πλήρως τις βασικότερες μεθόδους της Επιχειρησιακής Έρευνας που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στην ποσοτική ανάλυση λήψης των επιχειρηματικών αποφάσεων.

Όπως και στην περίπτωση του τόμου «Επιχειρησιακή Έρευνα», έτσι και εδώ η έμφαση έχει δοθεί στην προσέγγιση του θέματος μέσω Παραδειγμάτων και όχι στην παρουσίαση της μαθηματικής θεωρίας, η οποία έχει περιοριστεί στα απολύτως απαραίτητα. Επιπλέον, έχει καταβληθεί κάθε προσπάθεια ώστε η επιλογή της ύλης και ο τρόπος παρουσίασής της να διευκολύνουν τον αναγνώστη τόσο στην αρχική κατανόηση των εννοιών όσο και στην εμβάθυνσή τους, όπου αυτό είναι απαραίτητο. Για το λόγο αυτό, στην αρχή κάθε κεφαλαίου υπάρχουν ο **Σκοπός** του και τα **Προσδοκώμενα Αποτελέσματα**, που θέτουν το πλαίσιο της ύλης που θα παρουσιαστεί αλλά και της μελέτης της. Επιπλέον, καταγράφονται οι βασικές **Έννοιες-Κλειδιά** του κεφαλαίου, καθώς και οι **Εισαγωγικές Παρατηρήσεις**, όπου παρουσιάζεται περιληπτικά το περιεχόμενο του κεφαλαίου.

Στο τέλος κάθε κεφαλαίου, υπάρχουν **Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης** που συμβάλλουν στην εμπέδωση της ύλης και παράλληλα επιτρέπουν στον αναγνώστη να ελέγχει την πρόοδό του. Οι απαντήσεις των Ασκήσεων Αυτοαξιολόγησης περιέχονται στο **Παράρτημα** που υπάρχει στο τέλος κάθε κεφαλαίου. Επίσης, ο τόμος περιλαμβάνει ένα **Ευρετήριο Όρων** και ένα **Σύντομο Οδηγό για Περαιτέρω Μελέτη**, όπου παρουσιάζονται συνοπτικά ορισμένα χρήσιμα βιβλία για εκείνους που ενδιαφέρονται να μελετήσουν διεξοδικότερα το συγκεκριμένο θέμα. Τέλος, στην ελληνική και ξένη **Βιβλιογραφία**, που επίσης παρατίθεται στο τέλος του παρόντος τόμου, περιλαμβάνεται ένας αριθμός συγγραμμάτων σχετικών με το υπό μελέτη θέμα.

Ο παρών τόμος αποτελείται από πέντε κεφάλαια.

Στο **πρώτο κεφάλαιο**, που έχει εισαγωγικό χαρακτήρα, παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες της μεθοδολογίας του γραμμικού προγραμματισμού, τα βασικά

στοιχεία ενός μοντέλου γραμμικού προγραμματισμού και οι προϋποθέσεις που απαιτούνται ώστε ένα πρόβλημα να μπορεί να εκφραστεί ως μοντέλο γραμμικού προγραμματισμού. Στη συνέχεια, όσα θεωρητικά εκτέθηκαν εφαρμόζονται σε δύο συγκεκριμένα προβλήματα, τα οποία, αφού ελεγχθεί ότι ικανοποιούν τις σχετικές προϋποθέσεις, διατυπώνονται ως μοντέλα γραμμικού προγραμματισμού.

Στο **δεύτερο κεφάλαιο** παρουσιάζεται η μέθοδος της γραφικής επίλυσης προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Μετά τη θεωρητική παρουσίαση των βημάτων της μεθόδου, ακολουθεί η εφαρμογή της σε διάφορες μορφές προβλημάτων· το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τη διερεύνηση της λύσης τους και την ανάλυση της ευαισθησίας της. Η μέθοδος της γραφικής επίλυσης ενός προβλήματος γραμμικού προγραμματισμού μπορεί ουσιαστικά να εφαρμοστεί όταν το πρόβλημα έχει μόνο δύο μεταβλητές, καθώς τότε μόνο είναι δυνατή η γραφική παράσταση —στο επίπεδο— της αντικειμενικής συνάρτησης και των περιορισμών του. Για την επίλυση προβλημάτων με περισσότερες από δύο μεταβλητές, χρησιμοποιείται μια διαφορετική μέθοδος, η μέθοδος Simplex, η οποία προφανώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ως εναλλακτική της μεθόδου της γραφικής επίλυσης προβλημάτων με δύο μεταβλητές.

Η μέθοδος Simplex παρουσιάζεται αναλυτικά στο **τρίτο κεφάλαιο**. Όπως και στην περίπτωση της γραφικής επίλυσης προβλημάτων, μετά τη θεωρητική παρουσίαση των βασικών βημάτων της μεθόδου, ακολουθεί η εφαρμογή της σε διάφορες μορφές προβλημάτων και το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την ανάλυση ευαισθησίας της λύσης τους.

Μία από τις πιο σημαντικές διαπιστώσεις που προέκυψαν κατά τα πρώτα στάδια ανάπτυξης του γραμμικού προγραμματισμού είναι ότι για κάθε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού, το οποίο ονομάζεται αρχικό ή πρωτεύον, μπορεί να διατυπωθεί ένα αντίστοιχο δυϊκό του. Στο **τέταρτο κεφάλαιο** μελετάται το δυϊκό πρόβλημα και συγκεκριμένα ο τρόπος δημιουργίας του από το πρωτεύον πρόβλημα, οι σχέσεις μεταξύ πρωτεύοντος και δυϊκού προβλήματος, η οικονομική ερμηνεία του δυϊκού προβλήματος και η χρησιμότητά του.

Η μέθοδος Simplex αλλά και οι υπόλοιπες τεχνικές της επιχειρησιακής έρευνας, χωρίς τη χρήση Η/Υ, θα είχαν παραμείνει ενδιαφέροντα μαθηματικά εργαλεία, αλλά με πολύ περιορισμένη χρησιμότητα και πρακτική εφαρμογή. Η εξέλιξη των υπολογιστικών συστημάτων αλλά και των σχετικών πακέτων λογισμικού έδωσε στις μεθόδους αυτές μεγάλη ώθηση και διεύρυνε σημαντικά το πεδίο εφαρμογής τους. Το **πέμπτο κεφάλαιο** αναφέρεται σε τρία πακέτα λογισμικού: EXCEL (με την προσθήκη του Excel Solver), LINDO, WinQSB, που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού. Μετά τη θεωρητική παρουσίασή τους, τα πακέτα λογισμικού αυτά εφαρμόζονται σε συγκεκριμένα προβλήματα για τον εντοπισμό της λύσης, την ανάλυση της ευαισθησίας της και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων. Οι εικόνες που αναφέρονται στη λύση των προβλημάτων προέρχονται από τα προγράμματα MS Office

Excel 2003 της Microsoft, LINDO 6.1 και WinQSB 1.00 και χρησιμοποιούνται για καθαρά εκπαιδευτικούς λόγους.

Ολοκληρώνοντας τον **Πρόλογο**, θα πρέπει να τονιστεί ότι ο γραμμικός προγραμματισμός, όπως άλλωστε και όλες οι τεχνικές της επιχειρησιακής έρευνας, συμβάλλουν στη μελέτη της ποσοτικής διάστασης των επιχειρηματικών προβλημάτων και των αντίστοιχων αποφάσεων. Τα στοιχεία που προκύπτουν από την ανάλυση αυτή, σε συνδυασμό με τις γνώσεις, την εμπειρία και τα λοιπά ποιοτικά στοιχεία που διαθέτουν τα επιφορτισμένα με τη λήψη της απόφασης στελέχη των επιχειρήσεων και των οργανισμών, συμβάλλουν στη βελτίωση της ποιότητας των επιχειρηματικών αποφάσεων.